Pavel Obdržálek, LA II

3) *Zadání:* Rozložte vektor $u = (4, 3, 5)$ na součet $u = v+w$, kde $v \in V = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ a $w \in V^{\perp}$.

3) *Vypracování:* Bázi ortogonálního doplňku $V^{\perp}$ získáme jednoduše tak, že řekneme, že vektor $(p, q, r) \in V^{\perp}$. Víme, že tento vektor bude kolmý na oba vektory z báze V. Provedeme tedy skalární součin:

$$\langle(1, 1, 0), (p, q, r)\rangle = 1p + 1q + 0r \text{ a } \langle(0, 1, 1), (p, q, r)\rangle = 0p + 1q + 1r$$

Oba tyto součiny mají být rovné nule (pro zajištění kolmosti), odtud pak získáváme, že $p = -q$ a $q = -r$ (tedy i $p = r$). Toto splňuje například vektor $(1, -1, 1)$.

Jelikož víme, že $u = v + w$, pak $v = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1)$ a $w = c(1, -1, 1)$. Můžeme si tedy přepsat danou rovnici jako:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Odtud získáváme rovnice pro koeficienty:

$$\begin{array}{ccccc} \text{a} & & & + & \text{c} = 4 \\ \text{a} & + & \text{b} & \text{-} & \text{c} = 3 \\ & & \text{b} & + & \text{c} = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 2; b = 3; c = 2$$

Vektor u tak můžeme zapsat jako $u = v + w = 2(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) + 2(1, -1, 1)$.